TECNOTREND

SIMULACIÓN DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Dr. Edgar Alvarado Anell

Resumen

En este trabajo se presenta la simulación de un problema de optimización hecha con Mathematica 9 para visualizar gráficamente los valores posibles hasta llegar al resultado óptimo. El problema consiste en obtener el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio 1. Se muestra la secuencia de la simulación, así como el código del programa para que el usuario entienda el significado del problema y pueda reproducirlo.

Palabras clave

Derivadas, máximos y mínimos, área, volumen, superficie.

Introducción

Un problema de maximizar el volumen de un cono dentro de una esfera, por mencionar un ejemplo sencillo, requiere de un dibujo y muchas veces no es elaborado adecuadamente, y no solo eso, no se pueden visualizar correctamente todas las posibilidades que puedan surgir al empezar a resolver el problema.

En la realidad, existe un gran número de problemas de optimización (Larson y Edwards, 2010), (Purcel, et al, 2007), pero, por mencionar uno muy interesante, tenemos el ejemplo de las abejas que para construir las celdas de su panal que permiten almacenar la miel o, bien, en donde la reina pone las crías, se necesita cierta cantidad de cera. Se ha calculado que las celdas tienen forma hexagonal porque esa figura tiene un área mayor que si fuera un cuadrado o un círculo hechos con la misma cantidad de cera, esto en verdad es sorprendente.

Año 2017 ISSN en trámite Universidad De La Salle Bajío A.C.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 – 2016 – 113013104700 – 203

Por otro lado, hacer el dibujo en tres dimensiones es más complicado. Se puede representar el problema en dos dimensiones y colocar las variables, pero si en el problema se trata de calcular el volumen formado por la intercepción de varias figuras geométricas como un cilindro, un paraboloide y un plano, entonces la figura ya se vuelve muy complicada y difícil de visualizarla.

Aplicaciones de la derivada

Una de las aplicaciones de la derivada es la de optimizar el uso de materiales para la construcción de un recipiente, como lo es una lata de refresco, un tanque de gas, una caja de un servicio de paquetería o el de cercar un terreno (Leithold, 1998). Esto se conoce como máximos y mínimos, y la idea es utilizar de manera eficiente los materiales para la construcción de un objeto; por ejemplo, calcular las dimensiones de ese recipiente de tal manera que con cierta cantidad de material su capacidad sea máxima, o viceversa, que tenga un volumen dado con la mínima cantidad de material.

Una vez que se encuentra la función que determina el volumen o el área de lo cual se quiere que sea máximo o mínimo, se procede a derivarla para buscar los puntos críticos. Estos puntos críticos se sustituyen en la segunda derivada de la función y si el valor obtenido es negativo se tiene un máximo, pero si el valor es positivo, se obtiene un mínimo (Zill y Wright, 2011).

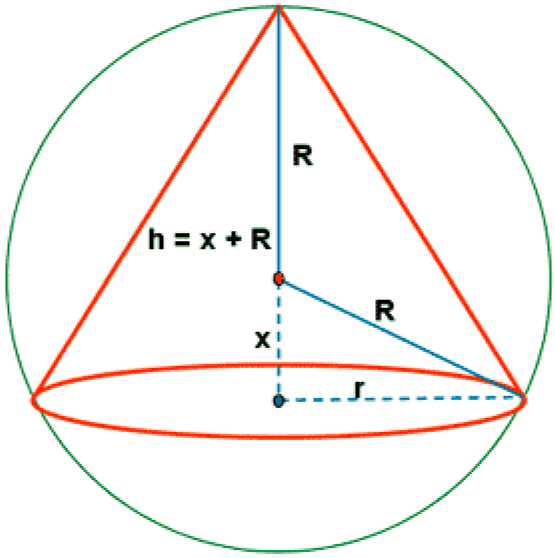

Fig. 1. Sección transversal del cono dentro de la esfera que muestra las variables usadas

Consideremos el siguiente problema: obtener el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio 1 (Thomas, 2010). En este caso, nos dan como dato el radio de la esfera, el cual utilizaremos para relacionar las variables *r* y *h* que representan el radio y la altura del cono respectivamente. De la fig. 1 vemos que $r^2 = 2hR - h^2$ donde *R* es el radio de la esfera. Por otro lado, nos piden que el volumen del cono sea máximo, lo que será nuestra función a derivar para obtener los números críticos

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2hR - h^2)h$$

Se obtiene la primera derivada y se iguala a cero

$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = 0,$

dándonos los números críticos *h=0, h=4R/3.* La segunda derivada es

Año 2017 ISSN en trámite Universidad De La Salle Bajío A.C.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04 – 2016 – 113013104700 – 203

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{1}{3}\pi(4R - 6h)$$

Al sustituir los valores de *R=1* y *h=4/3* nos da un número negativo lo que indica, por el criterio de la segunda derivada, que se tiene un volumen máximo cuando

$$h = \frac{4}{3}, \quad r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

El volumen máximo obtenido es aproximadamente de 1.2411, el cual es verificado con el programa hecho en Mathematica 9.

Simulación

El programa muestra una simulación del problema en cuestión, dando para diferentes valores del radio del cono, los valores del volumen y la superficie, así como la gráfica de la función volumen donde se puede apreciar el punto cuando se tiene el valor máximo. Las figuras 2-5 muestran la secuencia de cómo va variando el tamaño del cono y en la gráfica se ve cómo el punto verde se va desplazando hasta llegar a la parte más alta de la curva, mientras que debajo de la gráfica se van mostrando los valores del volumen y la superficie para cierto valor del radio del cono. La fig. 6 muestra el código del programa hecho en Mathematica 9.

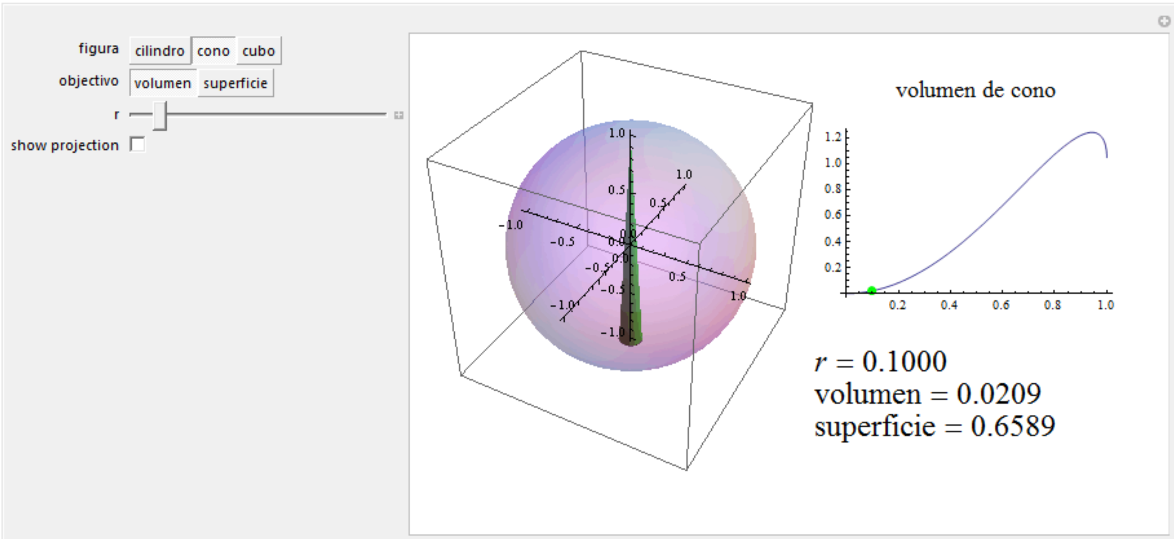

Fig. 2. Cono con r=0.1 y volumen 0.0209

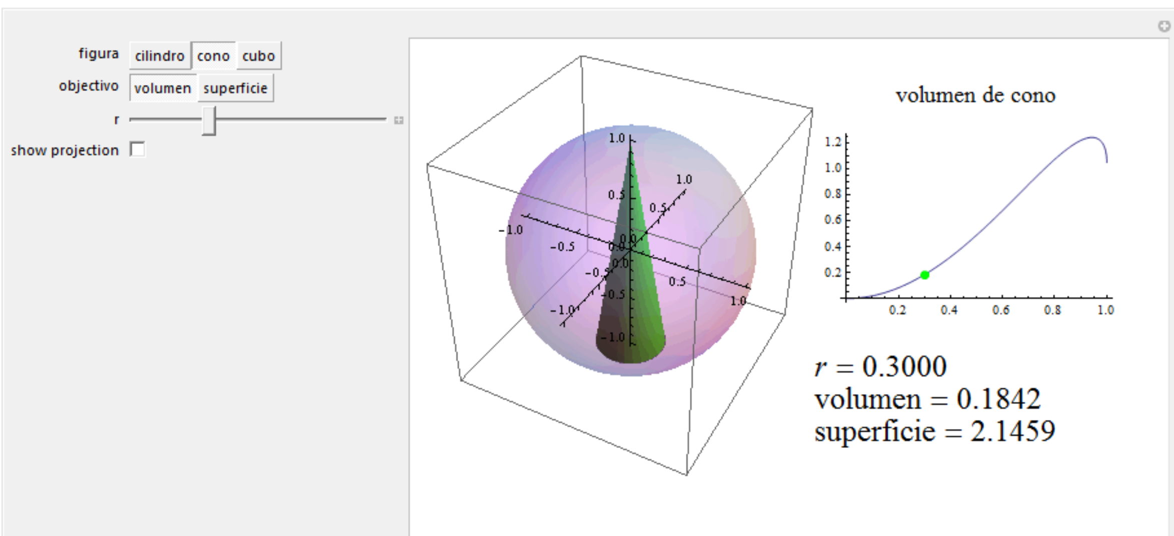

Fig. 3. Cono con r=0.3 y volumen 0.1842

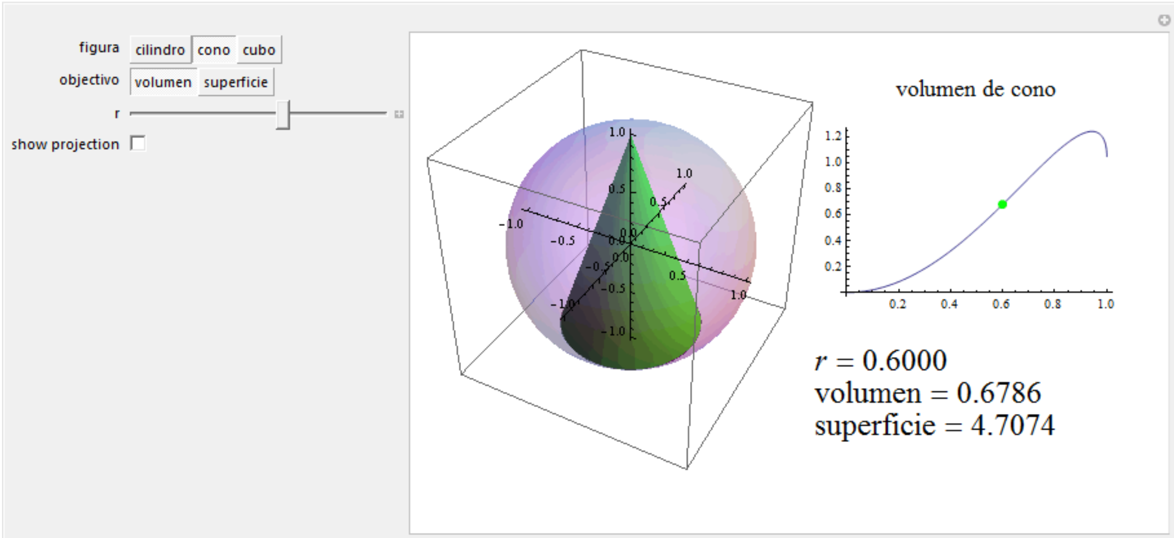

Fig. 4. Cono con r=0.6 y volumen 0.6786

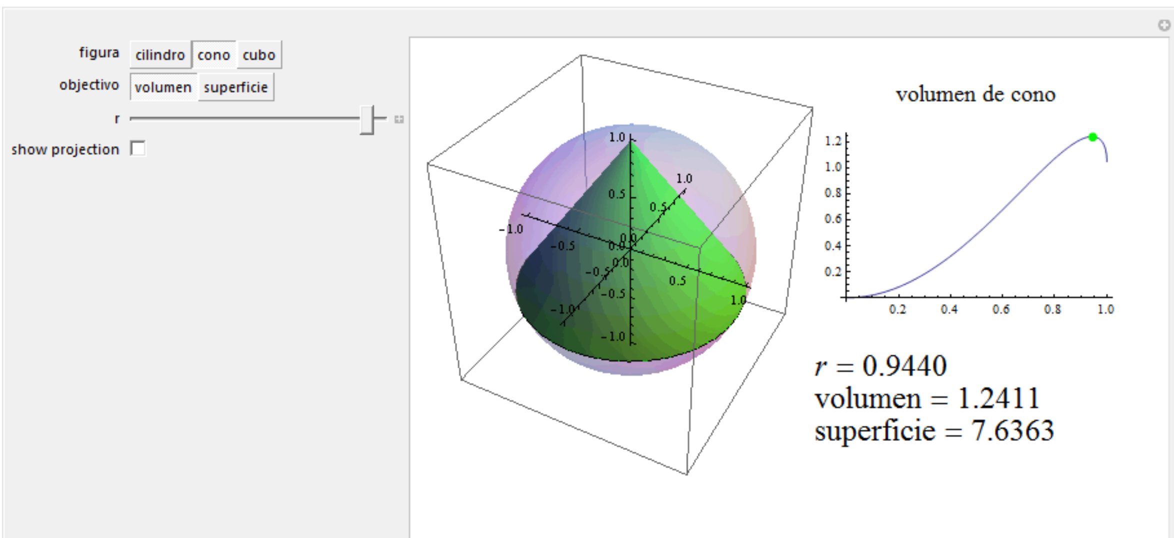

Fig. 5. Cono con r=0.9440 y volumen máximo 1.2411

```
Manipulate[
 If[r > maxr, r = maxr];
 theSphere = Graphics3D[{Opacity[0.4], Sphere[]}];
 theCircle = Graphics[Circle[]];

 theCylinder = Graphics3D[{Green, Cylinder[{{0, 0, -Sqrt[1 - r^2]}, {0, 0, Sqrt[1 - r^2]}}, r]}];
 volCylinder[r_] := Pi * r^2 * 2 Sqrt[1 - r^2];
 surfCylinder[r_] := 2 Pi * r^2 + 2 Pi * r * 2 Sqrt[1 - r^2];
 projCylinder = Graphics[{EdgeForm[Directive[Thick, Blue]], RGBColor[.25, .75, .25], Rectangle[{-r, -Sqrt[1 - r^2]}, {r, Sqrt[1 - r^2]}]}];

 theCone = Graphics3D[{Green, Cone[{{0, 0, -Sqrt[1 - r^2]}, {0, 0, 1}}, r]}];
 volCone[r_] := 1 / 3 * Pi * r^2 * (1 + Sqrt[1 - r^2]);
 surfCone[r_] := Pi * r^2 + Pi * r * Sqrt[r^2 + (1 + Sqrt[1 - r^2]) ^2];
 projCone = Graphics[{EdgeForm[Directive[Thick, Blue]], RGBColor[.25, .75, .25], Polygon[{{-r, -Sqrt[1 - r^2]}, {0, 1}, {r, -Sqrt[1 - r^2]}}]}];


 theCuboid = Graphics3D[{Green, Cuboid[{-r , -r, -Sqrt[1 - 2 r^2]}, {r , r , Sqrt[1 - 2 r^2]}]}];
 volCuboid[r_] := 4 r^2 * 2 Sqrt[1 - 2 r^2];
 surfCuboid[r_] := 8 r^2 + 4 * 2 r * 2 Sqrt[1 - 2 r^2];
 projCuboid = Graphics[{EdgeForm[Directive[Thick, Blue]], RGBColor[.25, .75, .25], Rectangle[{-r , -Sqrt[1 - 2 r^2]}, {r , Sqrt[1 - 2 r^2]}]}];

 Switch[fig,
  cilindro, theFigure = theCylinder; maxr = 1; volFunc = volCylinder; surfFunc = surfCylinder; proj = projCylinder,
  cono, theFigure = theCone; maxr = 1; volFunc = volCone; surfFunc = surfCone; proj = projCone,
  cubo, theFigure = theCuboid; maxr = Sqrt[2] / 2; If[r > Sqrt[2] / 2, r = 0.25]; volFunc = volCuboid; surfFunc = surfCuboid; proj = projCuboid];

 volPlot = Plot[volFunc[x], {x, 0, maxr}, PlotLabel → Style[Row[{volumen de , fig}], 18], ImageSize → 250, ImagePadding → 20];
 surfPlot = Plot[surfFunc[x], {x, 0, maxr}, PlotLabel → Style[Row[{superficie de , fig}], 18], ImageSize → 250, ImagePadding → 20];
 projPlot = Show[theCircle, proj, Axes → True, AxesLabel → {x, z}, ImageSize → 200];
 pointOnVolCurve = Graphics[{PointSize[Large], Green, Point[{r, volFunc[r]}]}];
 pointOnSurfCurve = Graphics[{PointSize[Large], Green, Point[{r, surfFunc[r]}]}];
 volDisplay = Show[volPlot, pointOnVolCurve, ImageSize → 250];
 surfDisplay = Show[surfPlot, pointOnSurfCurve, ImageSize → 250];

 Switch[obj, volumen, displayFunc = volDisplay, superficie, displayFunc = surfDisplay];
 Switch[disp, False, theDisplay = displayFunc, True, theDisplay = projPlot];

 Text@Pane[Row[{Show[theSphere, theFigure, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0, 0}, ImageSize → 300], Column[{Show[theDisplay], ,
       Style[Row[{Style[r, Italic],  = , NumberForm[r, {6, 4}]}], 24], Style[Row[{volumen = , NumberForm[volFunc[r], {6, 4}]}], 24],
       Style[Row[{superficie = , NumberForm[surfFunc[r], {6, 4}]}], 24]}]}], ImageSize → {560, 360}],


 {{fig, cilindro, figura}, {cilindro, cono, cubo}},
 {{obj, volumen, objectivo}, {volumen → volumen, superficie → superficie}, Enabled → ! disp},
 {{r, 0.5}, 0, maxr},
 {{disp, False, show projection}, {False, True}},
 {{maxr, 1}, ControlType → None},
 TrackedSymbols → True, AutorunSequencing → {1, 2, 3, 4}]
```

Fig. 6. Código del programa en Mathematica 9

Conclusiones

Se propone el uso de software para crear las figuras y mostrarlas al mismo tiempo que se esté resolviendo un problema de cálculo.

Se resuelve un problema de optimización y se visualiza con el software Mathematica 9, que además tiene su página en internet para consulta de muchos más ejemplos que pueden bajarse libremente.

La simulación muestra todas las dimensiones posibles para construir la figura en cuestión, así como también la única solución cuando se tiene un máximo, lo cual se muestra en la gráfica.

Se muestra una herramienta muy útil para entender mejor los problemas de aplicaciones.

Agradecimientos

Se agradece a la Universidad De La Salle Bajío por el apoyo brindado mediante el proyecto de investigación de la convocatoria 2016.

Referencias

D. G. Zill and W. S. Wright, Cálculo trascendentes tempranas. 4ª ed., New York: McGraw-Hill, 2011, pp. 218-228.

E. J. Purcell, D. Varberg, and S. E. Rigdon, *Cálculo*. 9a ed., Ed. Pearson, 2007, pp. 151-214.

G. B. Thomas, *Cálculo, una variable*. 12a ed., Ed. Pearson, 2010, pp. 223.

L. Leithold, *Cálculo*. 7a ed., Ed. Oxford university press, 1998, pp. 508-542.

M. Brodie, Wolfram Demonstrations Project. Consultado en: http://demonstrations.wolfram.com/MaximizingTheVolumeAndSurfaceAreaOfGeometricSolidsInscribedI/

R. Larson and B. H. Edwards, *Cálculo*. 9a ed., Ed. New York: McGraw-Hill, 2010, pp. 218-228.